

砝码磁性（磁化率）测量能力的评定

江苏省计量科学研究院 刘炜 王玲

【摘要】 JJG 99-2006《砝码检定规程》中首次将砝码的磁性作为检测项目进行首次检定，磁性检测是衡量砝码材料的一个重要方法，准确提供砝码磁性数据是砝码在量值传递中的重要支撑，本文就砝码磁性测量能力的评定做详细的探讨。

【关键词】 砝码；磁性；能力评定

一、概述

1. 测量方法：JJG 99-2006《砝码检定规程》、《砝码磁性测量比对细则》。

2. 环境条件：

温度：（19.5 ~ 20.0）；相对湿度：（46.6 ~ 50.4）%RH。

3. 测量设备：

磁性测量装置

质量比较仪：UMX5（5.1g/0.1 μ g）；

磁体：圆柱体，磁矩 m_d 为0.08432Am²。

4. 被测对象：符合JJG 99-2006形状要求的1kg砝码。

5. 测量方法：

采用磁化率计法：即由磁体的南、北极与被测砝码之间的作用力所引起的衡量仪器示值差异，计算得到被测砝码的磁性。本测量方法与砝码形状有一定的关系，通过几何修正可以计算出纯圆柱体的磁性。而JJG 99-2006形状的砝码不是单一的圆柱体（见图1），可以把它看成内切和外切两个由若干个圆柱体累加而成的圆柱体，因此砝码的实际磁性在内切磁性和外切磁性之间。



图1

二、数学模型

$$\text{磁化率 } \chi = \frac{F_a}{I_a \times F_{\max} - 0.4 \times F_a} = \frac{-(\Delta m_1 + \Delta m_2)g}{I_a \times \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2)g}$$

(JIG 99-2006 公式7)

式中： Δm_1 ——磁体北极向下时，磁体与砝码作用力引起的读数变化；

Δm_2 ——磁体北极向上时，磁体与砝码作用力引起的读数变化；

I_a ——几何修正因子；

Z_0 ——砝码底部到磁体中心的距离；

m_d ——磁体的磁矩 (0.08432Am^2)；

g ——重力加速度 (南京： 9.79494m/s^2)；

其中，几何修正因子 I_a 需要测量量为 Z_0 、 h 、 r 三个量，按照下式进行计算：

$$I_{a,j}(Z_0, r_j, h_k) = (-1)^{\alpha_i} \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{Z_0}{Z_0 + h_k} \right]^4 - \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_j}{Z_0} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0} \right)^2 \right]^3} + \left(\frac{Z_0}{Z_0 + h_k} \right)^4 \cdot \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_k} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_k} \right)^2 \right]^3} \right\} ;$$

(JIG 99-2006 公式9)

式中 α_i 为 1 或 2，取决于砝码形状。

由于 JIG 99-2006 形状的 1kg 砝码所允许的磁场强度不能超过 2000A/m，因此在本次测量中取 $Z_0=20.84\text{mm}$ 。

在计算 I_a 时，采用分别计算内切圆柱体和外切圆柱体的方法：

$$I_{a\text{外}} = I_a(r_{\text{圆柱体}}, h_{\text{圆柱体}}) + I_a(r_{\text{提钮端部}}, h_{\text{砝码总高}}) - I_a(r_{\text{提钮端部}}, h_{\text{圆柱体}}) - I_a(r_{\text{凹底最小}}, h_{\text{凹底深度}})$$

$$I_{a\text{内}} = I_a(r_{\text{圆柱体}}, h_{\text{圆柱体}}) + I_a(r_{\text{提钮颈部}}, h_{\text{砝码总高}}) - I_a(r_{\text{提钮颈部}}, h_{\text{圆柱体}}) - I_a(r_{\text{凹底最大}}, h_{\text{凹底深度}})$$

取 $\alpha_i=2$ ，用游标卡尺测得 JIG 99-2006 形状 1kg 砝码的几何尺寸数据如下：

圆柱体部分——半径 $r_1=23.95\text{mm}$ ，高 $h_1=58.5\text{mm}$ ；

提钮部分——端部半径 $r_2=21.45\text{mm}$ ，颈部半径 $r_3=13.5\text{mm}$ ；

砝码总高—— $h_2=80.8\text{mm}$ ；

凹底部分——最大半径 $r_5=16.75\text{mm}$ ，最小半径 $r_4=13.6\text{mm}$ ，深度 $h_3=0.76\text{mm}$ 。

分别代入 I_a, I_b 公式计算得到：

$$I_a(r_1, h_1, Z_0) = 0.8838, \quad I_a(r_2, h_2, Z_0) = 0.8449, \quad I_a(r_2, h_1, Z_0) = 0.8443,$$

$$I_a(r_3, h_2, Z_0) = 0.6015, \quad I_a(r_3, h_1, Z_0) = 0.6012,$$

$$I_a(r_5, h_3, Z_0) = 0.1143, \quad I_a(r_4, h_3, Z_0) = 0.0998,$$

$$I_{a内} = I_a(r_1, h_1, Z_0) + I_a(r_3, h_2, Z_0) - I_a(r_3, h_1, Z_0) - I_a(r_5, h_3, Z_0) = 0.7698$$

$$I_{a外} = I_a(r_1, h_1, Z_0) + I_a(r_2, h_2, Z_0) - I_a(r_2, h_1, Z_0) - I_a(r_4, h_3, Z_0) = 0.7846$$

已知连续测量得到的示值平均数 $\Delta m_1 = -0.1783\text{mg}$, $\Delta m_2 = -0.1638\text{mg}$,

从而计算得到：磁化率 $\chi_{内} = 0.00308$, $\chi_{外} = 0.00302$ 。

三、磁性不确定度分量的评定

1. 读数示值变化 $\Delta m_1, \Delta m_2$ 不确定度影响：

(1) 衡量过程的不确定度——通过连续测量得到测量列，采用统计分析方法即A类评定方法计算标准不确定度。

磁体北极向下	D1	D2	D3	D4	D5	D6
6次读数(mg)	-0.1792	-0.1787	-0.1776	-0.1772	-0.1782	-0.1787

$$\text{平均值 } \overline{\Delta m_1} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Delta m_{1i} = -0.1783\text{mg}$$

$$\text{测量平均值实验标准差 } s(\overline{\Delta m_1}) = \frac{s(\Delta m_1)}{\sqrt{n}} = 3.07 \times 10^{-4}\text{mg} \quad (n=6)$$

因此衡量过程的不确定度为 $u_w(\overline{\Delta m_1}) = s(\overline{\Delta m_1}) = 3.07 \times 10^{-4}\text{mg}$

磁体北极向上	U1	U2	U3	U4	U5	U6
6次读数(mg)	-0.1644	-0.1638	-0.16425	-0.16275	-0.16315	-0.16445

$$\text{平均值 } \overline{\Delta m_1} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Delta m_{1i} = -0.1638 \text{mg}$$

$$\text{测量平均值实验标准差 } s(\overline{\Delta m_1}) = \frac{s(\Delta m_1)}{\sqrt{n}} = 2.89 \times 10^{-4} \text{mg}$$

因此衡量过程的不确定度为 $u_w(\overline{\Delta m_1}) = s(\overline{\Delta m_1}) = 2.89 \times 10^{-4} \text{mg}$

(2) 显示分辨力引起的不确定度：

$$u_{d1} = u_{d2} = \left(\frac{d/2}{\sqrt{3}} \right) \times \sqrt{2} = \left(\frac{0.0001/2}{\sqrt{3}} \right) \times \sqrt{2} = 4.08 \times 10^{-5} \text{mg}$$

(3) 综上，读数示值变化 $\Delta m_1, \Delta m_2$ 不确定度为

$$u(\Delta m_1) = \sqrt{u_w^2(\overline{\Delta m_1}) + u_{d1}^2} = 3.10 \times 10^{-4} \text{mg}$$

$$u(\Delta m_2) = \sqrt{u_w^2(\overline{\Delta m_2}) + u_{d2}^2} = 2.92 \times 10^{-4} \text{mg}$$

2. 重力加速度 g 引入的不确定度：

已知南京的重力加速度为 9.79494m/s^2 ，因此 $u(g) = g/1000 = 9.79 \times 10^{-3} \text{m/s}^2$ 。

3. 磁偶极距 m_d 引入的不确定度：

查磁体的测试报告， $U_{rel} = 3\% (k=2)$ ，因此 $u(m_d) = 0.08432 \times 3\% / 2 = 1.27 \times 10^{-3} \text{Am}^2$ 。

4. 砝码底部到磁体中心的距离 Z_0 引入的不确定度：

通过生产商提供的标准样块，进行 6 次测量测得 Z_0 变化为：（单位为 mm）

20.84	20.85	20.83	20.84	20.81	20.84
-------	-------	-------	-------	-------	-------

取 20.84mm 为 Z_0 的结果值，其不确定度为

$$u(Z_0) = s(Z_0) = 0.0138 \text{mm}$$

5. 砝码几何尺寸测量参数半径 r ，高度 h 引入的不确定度：

游标卡尺的示值误差的允差为 $\pm 0.05 \text{mm}$ ，用均匀分布估算 $u_{\text{示}} = u(h) = 0.03 \text{mm}$ 。

四、灵敏系数的计算

1. 通过对磁化率计算公式求偏导，得到灵敏系数公式，由于在计算 I_a 时，采用分别计算内切圆柱体和外切圆柱体的方法，因此也需分别计算出内模和外模时的灵敏系数。

(1) 内模圆柱体的灵敏系数计算：

$$C_1 = C_2 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial(\Delta m_1)} = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial(\Delta m_2)} = \frac{-I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} g}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2)g \right]^2} = -9024.16(1/\text{kg})$$

$$C_3 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial(g)} = \frac{-I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} (\Delta m_1 + \Delta m_2)}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2)g \right]^2} = 3.15 \times 10^{-4} (\text{s}^2/\text{m})$$

$$C_4 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial(m_d)} = \frac{I_{a\text{内}} \frac{6m_d}{8Z_0^4} \times 10^{-7} (\Delta m_1 + \Delta m_2)g}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2)g \right]^2} = -0.0732(1/\text{Am}^2)$$

$$C_5 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial(Z_0)} = \frac{\frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} (\Delta m_1 + \Delta m_2)g \left(\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial Z_0} - \frac{4I_{a\text{内}}}{Z_0} \right)}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2)g \right]^2}$$

$$\frac{\partial I_a(r_j, h_x, Z_0)}{\partial Z_0} = 4 \left\{ \frac{Z_0^3 h_x}{(Z_0 + h_x)^5} \left[\frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_x} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_x} \right)^2 \right]^3} - 1 \right] + \frac{r_j^2}{3} \cdot \left[\frac{Z_0^4}{(Z_0 + h_x)^7} \frac{4 + \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_x} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_x} \right)^2 \right]^4} - \frac{1}{Z_0^3} \frac{4 + \left(\frac{r_j}{Z_0} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0} \right)^2 \right]^4} \right] \right\}$$

将已知的内模圆柱体几何量参数数据分别代入公式计算得到：

$$\frac{\partial I_a(r_1, h_1, Z_0)}{\partial Z_0} = -15.6181(1/\text{m}), \quad \frac{\partial I_a(r_5, h_3, Z_0)}{\partial Z_0} = -7.7932(1/\text{m})$$

$$\frac{\partial I_a(r_3, h_2, Z_0)}{\partial Z_0} = -29.2248(1/\text{m}), \quad \frac{\partial I_a(r_3, h_1, Z_0)}{\partial Z_0} = -29.2551(1/\text{m})$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial Z_0} = \frac{\partial I_a(r_1, h_1, Z_0)}{\partial Z_0} + \frac{\partial I_a(r_3, h_2, Z_0)}{\partial Z_0} - \frac{\partial I_a(r_3, h_1, Z_0)}{\partial Z_0} - \frac{\partial I_a(r_5, h_3, Z_0)}{\partial Z_0} = -7.7946(1/\text{m})$$

$$\text{因此 } C_5 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (Z_0)} = 0.6237(1/\text{m})$$

$$C_6 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial r_u} = \frac{\frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} (\Delta m_1 + \Delta m_2) g \times \frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial r_u}}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2) g \right]^2}$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial r_u} = \frac{4}{3} r_u \left\{ \frac{1}{Z_0^2} \frac{4 + \left(\frac{r_u}{Z_0}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{r_u}{Z_0}\right)^2\right)^4} - \frac{Z_0^4}{(Z_0 + h_x)^6} \cdot \frac{4 + \left(\frac{r_u}{Z_0 + h_x}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r_u}{Z_0 + h_x}\right)^2\right]^4} \right\}$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (r_1)} = \frac{\partial I_a(r_1, h_1, Z_0)}{\partial (r_1)} = 13.4174(1/\text{m})$$

$$\text{对应的 } C_6(r_1) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (r_1)} = -0.0538(1/\text{m})$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (r_3)} = \frac{\partial I_a(r_3, h_2, Z_0)}{\partial (r_3)} - \frac{\partial I_a(r_3, h_1, Z_0)}{\partial (r_3)} = 0.0374(1/\text{m})$$

$$\text{对应的 } C_6(r_3) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (r_3)} = -1.5 \times 10^{-4}(1/\text{m})$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (r_5)} = \frac{\partial I_a(r_5, h_3, Z_0)}{\partial (r_5)} = -3.5225(1/\text{m})$$

$$\text{对应的 } C_6(r_5) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (r_5)} = 0.0141(1/\text{m})$$

$$\text{因此 } C_6 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial r_u} = \sqrt{C_6^2(r_1) + C_6^2(r_3) + C_6^2(r_5)} = 0.0556(1/\text{m})$$

$$C_7 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (h_v)} = \frac{\frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} (\Delta m_1 + \Delta m_2) g \times \frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial h_v}}{\left[I_{a\text{内}} \frac{3m_d^2}{8Z_0^4} \times 10^{-7} + 0.4(\Delta m_1 + \Delta m_2) g \right]^2}$$

$$\frac{\partial I_a}{\partial h_v} = \frac{4Z_0^4}{(Z_0 + h_v)^5} \left\{ 1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r_j}{Z_0 + h_v} \right)^2 \right]^4} \right\}$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (h_1)} = \frac{\partial I_a(r_1, h_1, Z_0)}{\partial (h_1)} - \frac{\partial I_a(r_3, h_1, Z_0)}{\partial (h_1)} = 0.04478 (1/m)$$

$$\text{对应的 } C_7(h_1) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial h_1} = -1.8 \times 10^{-4} (1/m)$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (h_2)} = \frac{\partial I_a(r_3, h_2, Z_0)}{\partial (h_2)} = 0.0047 (1/m)$$

$$\text{对应的 } C_7(h_2) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (h_2)} = -1.88 \times 10^{-5} (1/m)$$

$$\frac{\partial I_{a\text{内}}}{\partial (h_3)} = -\frac{\partial I_a(r_5, h_3, Z_0)}{\partial (h_3)} = -136.063 (1/m)$$

$$\text{对应的 } C_7(h_3) = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial (h_3)} = 0.5456 (1/m)$$

$$\text{因此 } C_7 = \frac{\partial \chi_{\text{内}}}{\partial h_v} = \sqrt{C_7^2(h_1) + C_7^2(h_2) + C_7^2(h_3)} = 0.5456 (1/m)$$

综合上述各灵敏度系数和各不确定度分量，体积磁化率 $\chi_{\text{内}}$ 合成标准不确定度为：

$$u(\chi_{\text{内}}) = \left\{ C_1^2 u^2(\Delta m_1) + C_2^2 u^2(\Delta m_2) + C_3^2 u^2(g) + C_4^2 u^2(m_d) + C_5^2 u^2(Z_0) + C_6^2 u^2(r_u) + C_7^2 u^2(h_v) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=9.46 \times 10^{-5}$$

同理计算出外模圆柱体时的灵敏系数 $C_1 \sim C_7$ ，带入合成标准不确定中得到：

$$u(\chi_{\text{外}}) = \left\{ C_1^2 u^2(\Delta m_1) + C_2^2 u^2(\Delta m_2) + C_3^2 u^2(g) + C_4^2 u^2(m_d) + C_5^2 u^2(Z_0) + C_6^2 u^2(r_u) + C_7^2 u^2(h_v) \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=9.24 \times 10^{-5}$$

五、扩展不确定度

$$U_{\text{内}} = 2 \times \chi_{\text{内}} = 0.000189 \quad (k=2)$$

$$U_{\text{外}} = 2 \times \chi_{\text{外}} = 0.000185 \quad (k=2)$$

日常工作中通常采用取绝对值较大的磁化率值是否超过允差来判断砝码是否满足相应的准确度等级的要求。因此本砝码的磁化率可表示为 $(0.0031 \pm 0.0002)(k=2)$ 。JJG 99-2006《砝码检定规程》中规定，如果测量砝码的极化强度和磁化率小于规程规定的极限值，则可以认为砝码磁性引起的不确定度分量在砝码的不确定度评定时可忽略不计。

参考文献

1. JJG 99-2006《砝码》
- 2.《砝码磁性测量比对细则》

作者简介

刘炜，江苏省计量科学研究院高工，全国质量密度计量技术委员会委员，长期从事质量（天平、砝码）和衡器的检测、校准和研究工作，近几年参加多个国家标准和规程的编写，在相关期刊上发表专业论文20余篇。